Corso di Laurea: Fisica
Esame: Termodinamica e Fluidodinamica (scritto e soluzioni)
19 giugno 2019

Esercizio n.1
Una macchina contenente 3 moli di gas perfetto biatomico in 40 litri, inizialmente alla temperatura di 500 K, compie un ciclo composto dalle seguenti trasformazioni:
AB - Adiabatica irreversibile fino ad un volume di 100 litri;
BC - Isocora irreversibile[1] fino ad una temperatura di 200 K;
CA - Politropica fino a chiudere il ciclo.
Determinare il valore della temperatura nel punto B affinché il rendimento del ciclo sia nullo e calcolare la variazione di entropia dell'universo in quel caso.
Determinare infine il rendimento della macchina che compie lo stesso ciclo ABC nel caso in cui le trasformazioni siano tutte reversibili (fare attenzione alla trasformazione AB...).
Soluzione n.1
Affinché il rendimento del ciclo sia nullo deve essere $Q_{BC} = -Q_{CA}$ con Q_{BC} (Q_{CA}) il calore scambiato nella trasformazione BC (CA), essendo nullo il calore scambiato lungo AB.

$$Q_{BC} = nc_V(T_C - T_B)$$

$$Q_{CA} = \Delta U_{CA} + L_{CA} = nc_V(T_A - T_C) + \frac{nR}{1-\alpha}(T_A - T_C)$$

ma dobbiamo determinare il coefficiente α della politropica

$$T_A V_A^{\alpha-1} = T_C V_C^{\alpha-1}$$

da cui

$$\frac{T_A}{T_C} = \left(\frac{V_C}{V_A}\right)^{\alpha-1}$$

numericamente

$$\frac{500}{200} = \left(\frac{100}{40}\right)^{\alpha-1}$$

da cui si ricava immediatamente $\alpha = 2$. Pertanto

$$nc_V(T_C - T_B) = -nc_V(T_A - T_C) + nR(T_A - T_C)$$

da cui

$$T_B = T_A - \frac{R}{c_V}(T_A - T_C) = 380\ K$$

che mi permette di calcolare i calori scambiati

$$Q_{BC} = -11224.6J \quad ; \quad Q_{CA} = 11224.6\ J$$

[1] per convenzione un'isocora irreversibile è una trasformazione a volume costante in cui il sistema viene messo a contatto con un serbatoio fino a raggiunge l'equilibrio termico

La variazione di Entropia dell'Universo si calcola sommando la variazione di entropia dell'ambiente per tutte le trasformazioni del ciclo:

$$(\Delta S_{AB})_{amb} = 0 \text{ J/K essendo } AB \text{ un'adiabatica}$$

$$(\Delta S_{BC})_{amb} = \frac{nc_V(T_B - T_C)}{T_C} = 56.1 \; J/K$$

$$(\Delta S_{CA})_{amb} = -(\Delta S_{CA})_{sys} = -\left(nc_V \ln\frac{T_A}{T_C} + nR\ln\frac{V_A}{V_C}\right) = -34.3 \; J/K$$

e quindi

$$\Delta S_U = (\Delta S_{BC} + \Delta S_{CA})_{amb} = 21.8 \; J/K$$

Qui ci sono due soluzioni diverse, entrambe prese per buone

1 caso (corretto) Se il ciclo è completamente reversibile, la trasformazione AB non può essere un'adiabatica, ma sarà una politropica:

$$T_A V_A^{\alpha'-1} = T_B V_B^{\alpha'-1}$$

da cui

$$\frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\alpha'-1}$$

numericamente

$$\frac{500}{380} = \left(\frac{100}{40}\right)^{\alpha'-1}$$

da cui si ottiene $\alpha' = 1.30$. Calcolo il calore scambiato in questa trasformazione ed ottengo

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} + L_{AB} = nc_V(T_B - T_A) + \frac{nR}{1-\alpha'}(T_B - T_A) = 2494.3 \; J$$

$$\eta = 1 + \frac{Q_{BC}}{Q_{AB} + Q_{CA}} = 1 + \frac{-11224.6}{2494.3 + 11224.6} = 0.182$$

2 caso (accettato) Se il ciclo è completamente reversibile, allora anche la trasformazione adiabatica lo sarà e pertanto il punto B' sarà diverso dal punto B del ciclo precedente, in quanto la trasformazione adiabatica reversibile raggiunge la temperatura minima possibile data da:

$$T_{B'} V_B^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}$$

da cui si ricava $T_{B'} = 347$ K. Ed il rendimento del ciclo sarà dato da:

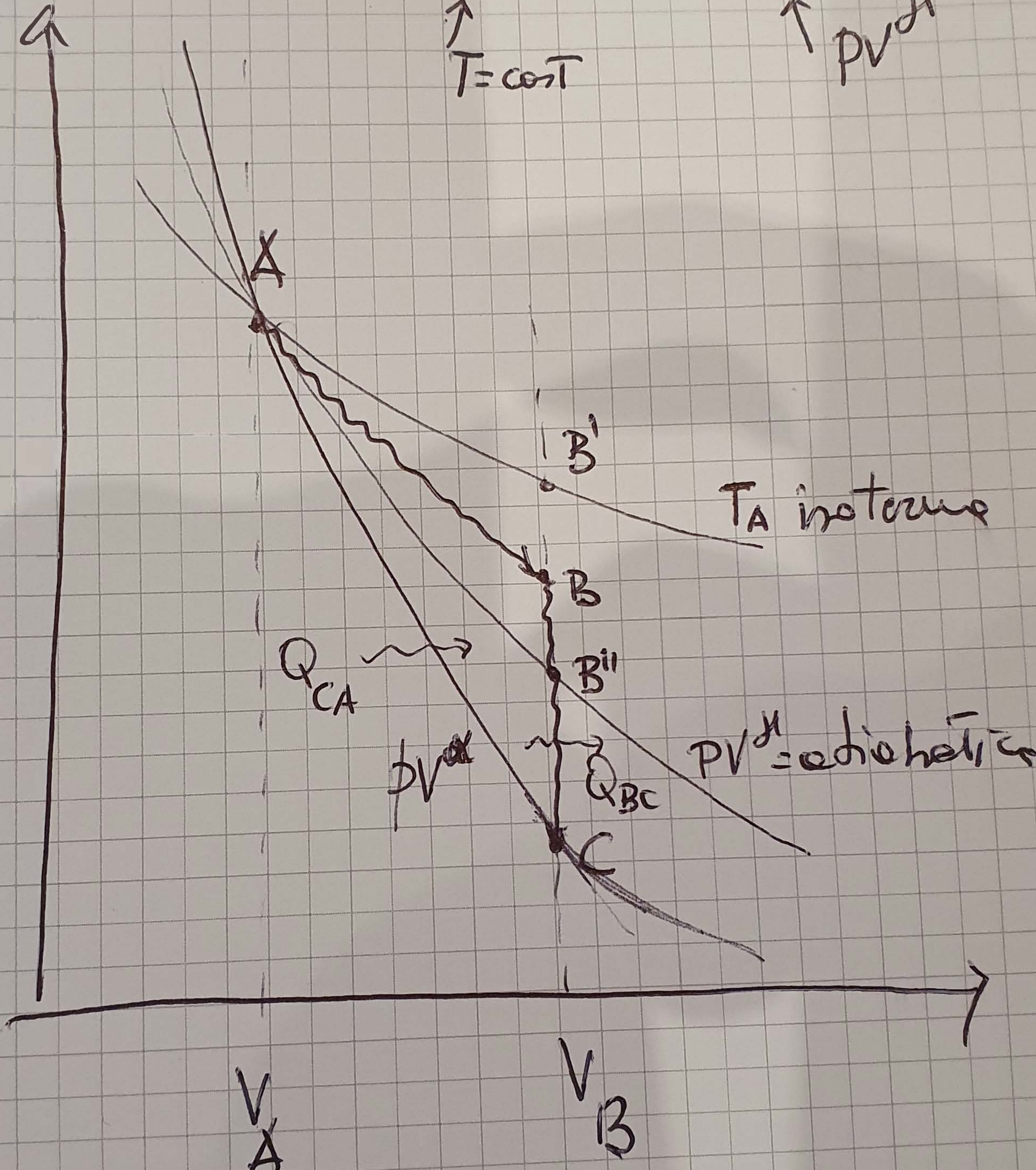
$$\eta = 1 + \frac{Q_{B'C}}{Q_{CA}} = 1 + \frac{nc_V(T_C - T_{B'})}{Q_{CA}} = 1 + \frac{-9166.7}{11224.6} = 0.183$$

Esercizio n.2

Un recipiente cilindrico diatermico, chiuso ad un'altezza di 1 m da un pistone cilindrico di 25 cm di diametro e di massa m, scorrevole senza attrito, contiene 2 moli di gas perfetto monoatomico. Il sistema è in equilibrio termodinamico

$B' < B < B''$

$\uparrow$ $T = \text{cost}$ $\qquad\qquad\qquad$ $\uparrow$ pV^{γ}



B | $Q_{CA} = -Q_{BC}$

Es. 2 Sistema complessivo

$\Delta L = 0$, $\Delta Q = 0$ $\Rightarrow \Delta U = \phi$ $\Rightarrow T = \text{costante}$

quindi

$T_f = T_i = T = 300\,K$

$p_1 = 1\,atm$ $\quad p_2 = 2\,atm$

$V_1 = 1\,l$ $\quad V_2 = 1\,l$

$V = V_1 = V_2$

$p_1 V_1 = n_1 RT$

$p_2 V_2 = n_2 RT$

pertanto $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{n_1}{n_2} \Rightarrow n_2 = 2 n_1$

$(n_1 + n_2) = \dfrac{(p_1 + p_2)V}{RT}$

$p_f V_1' = n_1 RT$

$p_f V_2' = n_2 RT$

$\Rightarrow p_f (V_1' + V_2') = (n_1 + n_2) RT$

$\boxed{V_1' + V_2' = 2V}$

$$p_f = \frac{(n_1 + n_2) RT}{V_1' + V_2'} = \frac{(p_1 + p_2)V}{RT} \cdot \frac{RT}{V_1' + V_2'} = \frac{p_1 + p_2}{2} = 1.5\,atm$$

Per il calcolo della variazione di entropia seguiamo un percorso reversibile, e quindi una trasformazione isoterma

$$\Delta S_U = \Delta S_1 + \Delta S_2 = n_1 R \ln \frac{V_1'}{V_1} + n_2 R \ln \frac{V_2'}{V}$$

sostituiamo n_1 e n_2

$$\Delta S = \frac{p_1 V}{RT} \cdot R \ln \frac{V_1'}{V} + \frac{p_2 V}{RT} \cdot R \ln \frac{V_2'}{V} = \frac{V}{T}\left(p_1 \ln \frac{V_1'}{V} + p_2 \ln \frac{V_2'}{V}\right)$$

ma $\dfrac{V_1'}{V} = \dfrac{p_1}{p_f}$ e $\dfrac{V_2'}{V} = \dfrac{p_2}{p_f}$

$$\Delta S = \frac{V}{T}\left(p_1 \ln \frac{p_1}{p_f} + p_2 \ln \frac{p_2}{p_f}\right) = \frac{10^{-3} \times (1.013 \times 10^5)}{300}\left[1 \cdot \ln \frac{1}{1.5} + 2 \ln \frac{2}{1.5}\right] = 0.0574\,J/K$$

E55

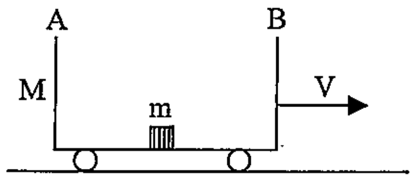
Corso di Studi in Fisica
Corso di Dinamica e Termodinamica/Meccanica con Esperimentazioni
Prova Scritta – 21 giugno 2006

I Esercizio

Una moneta di raggio r = 2 cm viene lanciata dal punto A di un profilo rigido disposto nel piano verticale, costituito da un tratto rettilineo AB orizzontale e da una semicirconferenza BC di raggio R = 20 cm. Calcolare quale è la minima velocità v_G' che bisogna imprimere al baricentro della moneta perché arrivi in C rotolando senza strisciare.

II Esercizio

Un carrello AB ha massa M = 30 Kg e lunghezza l = 4 m. Sul carrello è appoggiato un corpo di massa m = 2 Kg e il sistema è inizialmente in quiete. Si mette in moto il carrello su un piano orizzontale con velocità V = 8 m/s. Trascurando tutti gli attriti, calcolare: a) le velocità V' e v' di M e m dopo il primo urto, supposto elastico; b) il tempo che intercorre tra il primo ed il secondo urto; c) la velocità V" del sistema, dopo il secondo urto, supposto totalmente anelastico.



III Esercizio (Dinamica e Termodinamica)

Una mole di gas ubbidisce all'equazione di stato p + kV = RT, dove k è costante, ed ha come espressione dell'energia interna U = c_VT + kV. Si calcoli la variazione di entropia del gas tra lo stato 1 e lo stato 2 caratterizzati dalla stessa pressione. Determinare inoltre la relazione fra le capacità termiche molari a pressione e a volume costante.

III Esercizio (Meccanica con Esperimentazioni)

Un proiettile di massa m viene sparato orizzontalmente da un cannone di massa M che scivola liberamente lungo un piano inclinato liscio di inclinazione a. Al momento dello sparo, che avviene istantaneamente, il cannone ha percorso un tratto l. Determinare, in modulo: a) la velocità V del cannone all'istante dello sparo; b) la velocità v con cui deve essere sparato il proiettile, perché sia nulla la velocità del cannone l'istante dopo lo sparo.

(Tempo: 2 ore; Risultati e date orali: http://reactivity.tasc.infm.it/comelli.htm)

Es. 3

Calcoliamo ΔS_{12} lungo un'isobara reversibile

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} c_p \frac{dT}{T} = \dots$$

ma

$$c_p = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_p = \left(\frac{dU + p\,dV}{dT}\right)_p$$

con

$$p + aV = RT \qquad e \qquad U = c_V T + aV$$

da cui differenziando

$$dp + a\,dV = R\,dT \qquad e \qquad dU = c_V\,dT + a\,dV$$

Essendo p = costante si ottiene immediatamente

$$dV = \frac{R}{a}\,dT \Longrightarrow dU = c_V\,dT + a\frac{R}{a}\,dT = (c_V + R)\,dT$$

pertanto

$$c_p = \frac{(c_V + R)\,dT + p\frac{R}{a}\,dT}{dT} = c_V + R + \frac{pR}{a}$$

Tornando al calcolo di ΔS_{12}

$$\Delta S_{12} = \int_{T_1}^{T_2} \left(c_V + R + \frac{pR}{a}\right)\frac{dT}{T} = \left(c_V + R + \frac{pR}{a}\right)\ln\frac{T_2}{T_1}$$

essendo p costante

EoS: $p + QV = RT$ Energia Interna: $U = c_V T + QV$

Se I e II PTD rispettati

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \frac{1}{T} \quad ; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{p}{T}$$

$$\begin{cases} p = RT - QV = \dfrac{R(U-QV)}{c_V} - QV = \dfrac{R(U-QV) - Qc_V V}{c_V} \\ T = \dfrac{U-QV}{c_V} \end{cases}$$

quindi

$$\frac{1}{T} = \frac{c_V}{U-QV} \qquad \frac{p}{T} = \frac{R(U-QV) - Qc_V V}{U-QV}$$

$$\left(\frac{\partial \frac{1}{T}}{\partial V}\right)_U = \left(\frac{\partial \frac{c_V}{U-QV}}{\partial V}\right)_U = \frac{Qc_V}{(U-QV)^2}$$

$$\left(\frac{\partial \frac{p}{T}}{\partial U}\right)_V = \left(\frac{\partial \frac{R(U-QV) - Qc_V V}{U-QV}}{\partial U}\right)_V = \frac{R(U-QV) - [RU - QV(c_V + R)]}{(U-QV)^2} = \frac{Qc_V V}{(U-QV)^2}$$

ergo

L'EoS e l'espressione dell'Energia Interna NON sono compatibili con il I ed il II Principio della Termodinamica!

Ho provato ad ipotizzare la mancanza di una parentesi ...

$$\begin{cases}(p+Q)V = nRT \\ U = nc_vT + QV\end{cases}$$

in questo modo si ricava

sbagliato!

$$\frac{1}{T} = \frac{U + QV}{n c_v}$$

$$\frac{p}{T} = \frac{nR}{V} - \frac{Q}{T} = \frac{nR}{V} - \frac{Q n c_v}{U - QV}$$

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{n Q c_v}{(U - QV)^2}$$

che sono uguali

$$\frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{p}{T}\right) = \frac{n Q c_v}{(U - QV)^2}$$

Soddisfano al I e II PTD

$$\Delta S = \int_1^2 dS = \int_1^2 \frac{dU}{T} + \frac{p}{T}\,dV$$

ma

$$dU = n c_v\, dT + a\, dV$$

~~e a pressione costante~~

da cui

$$\Delta S = \int_1^2 n c_v \frac{dT}{T} + \frac{p+a}{T}\,dV$$

ma $(p+a)V = nRT$ e pertanto

$$V\,d(p+a) + (p+a)\,dV = nR\,dT$$

e a pressione costante $dp = 0$

e quindi

$$dV = \frac{nR}{p+a}\,dT$$

$$\Delta S = \int_1^2 n c_v \frac{dT}{T} + \frac{nR\,(p+a)}{(p+a)}\frac{dT}{T}$$

$$= n(c_v + R)\ln\frac{T_2}{T_1}$$

Infine

$$\underline{C_p = C_v + R}$$

per $a = 0$
diventa un
gas perfetto ...